



TITLE:

Gray-Scottモデルにみられるパルスの分裂過程に対する理論的アプローチ (散逸系の数理: パターンを表現する漸近解の構成)

AUTHOR(S):

上田, 肇一; 西浦, 廉政

CITATION:

上田, 肇一 ...[et al]. Gray-Scottモデルにみられるパルスの分裂過程に対する理論的アプローチ (散逸系の数理: パターンを表現する漸近解の構成). 数理解析研究所講究録 2010, 1680: 49-61

ISSUE DATE:

2010-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141333>

RIGHT:

Gray-Scott モデルにみられるパルスの分裂過程に対する 理論的アプローチ

京都大学 数理解析研究所 上田 肇一 (Kei-Ichi UEDA)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

北海道大学 電子科学研究所 西浦 廉政 (Yasumasa NISHIURA)

Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University

1 はじめに

近年、反応拡散系にみられるパルスや縞模様の分裂パターン（自己複製パターン）が注目されており、CIMA 反応による自己複製パターンの発見 [1]，魚の表皮パターンで起きる縞模様分岐 [2] の発見，サドル・ノード分岐点近傍における分裂過程の解析 [3] など実験的，理論的に盛んに研究されている．

パルスの分裂パターンがみられるモデルの一つとして次の Gray-Scott モデルがある．

$$\begin{aligned} u_t &= D_u u_{xx} - uv^2 + A(1 - u), \\ v_t &= D_v v_{xx} + uv^2 - (A + k)v, \end{aligned} \quad x \in [0, L], \quad t > 0. \quad (1)$$

パラメータを $D_u/D_v = 2$, $A = 0.04$ すると安定なパルス解 ($k = 0.061$) と分裂が続けて起きる現象 ($k = 0.0605$) がみられる (図 1(a)(b))．分裂現象が発生し始めるパラメータ $k = k_c$ はサドル・ノード分岐点に対応することが知られている ([3])．

図 1(a)(b) で示したシミュレーションは十分長い区間で行われた数値実験であるが， $k < k_c$ (十分大きい領域では分裂が起きるパラメータ) としたとしても十分狭い領域でシミュレーションを行うと分裂が起きないことがわかる (図 1(c))．これは境界 (図 1 の場合はノイマン境界条件) による影響で分裂の不安定化が抑えられるためにみられる現象である．パラメータ k を $k < k_c$ となるように固定したときに，領域の長さ L をコントロールパラメータにとると，ある長さ $L_c(k)$ が存在して， $L < L_c(k)$ のときには分裂がおきず， $L > L_c(k)$ のときに分裂が見られることがわかる．また， $L_c(k)$ はサドル・ノード分岐点に対応する．

さて， L を時間の関数 $L(t) = L_0 \gamma(t)$ ($\gamma(t) = 1 + ct$) として領域長が時間とともに増加する場合を考える¹．ここで $\gamma(0) = 1$ であるため L_0 は初期の領域長に対応する．パラメータを $k < k_c$ かつ初期の領域長を $L_0 < L_c(k)$ とし， $\gamma(t)$ が時間とともに徐々に大きくなるときにパターンはどのように遷移するかを数値シミュレーションによって確かめてみる．領域長 L が $L_c(k)$ に達した時刻以降に 1 回目の分裂が開始し，2 つのパルスに分裂する様子がみられる．では，2 回目の分裂のときには何が起きるであろうか？実は， L の拡大速度によって分裂の仕方が変化する様子が見られる．速度が $c = 1.0 \times 10^{-5}$ のときには図 2 のようにパルスの数が 2 から 4 になり，速度が $c = 1.0 \times 10^{-6}$ のときには 2 から 3 になる．2 回目以降の分裂においても分裂過程が速

¹ 領域長 L が時間の関数となった場合は，領域が成長したことによる物質の輸送を考慮しなければならないが，領域長の拡大速度が十分遅い場合はその効果は十分小さいのでここでは無視する．詳しくは Crampin ら [4] を参照

度に依存する様子が観察される．さらに数値実験を行うと，拡大速度が速い場合には全てのパルスが一斉に分裂する「一斉分裂」，拡大速度が遅い場合には各分裂のタイミングで整列する n 個のパルスが1つおきに分裂する「交互分裂」が頻繁に見られることがわかる [5]．

領域の拡大速度に依存したパルスの分裂は Crampin ら [4] による数値シミュレーションによって指摘されて以来，数値的アプローチによる研究が行われているが ([6])，なぜ交互分裂が発生するのか？など拡大領域におけるパターンの遷移過程に対する解析的なアプローチはこれまで行われてこなかった．本稿では縮約理論を用いて分裂の仕方の速度依存性を明らかにする．

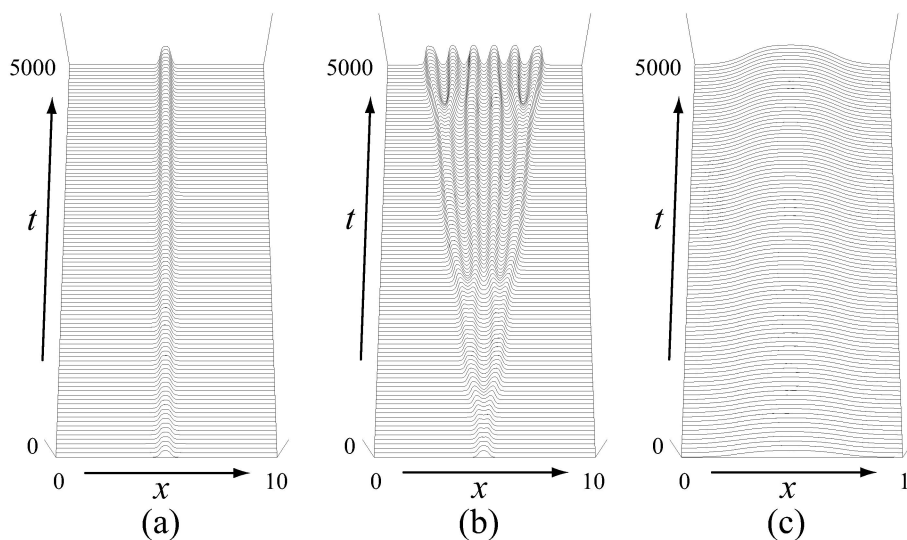


図 1: パラメータ k 及び領域長 L を変化させたときの方程式 (1) の振る舞い． (a) $k = 0.0610, L = 10$. (b) $k = 0.0605, L = 10$. (c) $k = 0.0605, L = 1$.

2 大域的分岐図

領域成長速度に依存して分裂パターンが変化する仕組みを調べる際に，領域長をコントロールパラメータとしたときの大域的分岐図を調べることは重要である．図 3 は $k = 0.0609 < k_c, \gamma$ をコントロールパラメータとしたときの n 山定常解の分岐図である．全ての n 山定常解でサドル・ノード分岐点が存在する．1 山解はサドル・ノード分岐点で安定性を失い，それ以外の定常解ではサドル・ノード分岐点より少し小さい γ において起きる分岐点 (BP_n) によって安定性を失う．

不安定化した後の分裂の振る舞いを調べるために， γ を BP_j と SN_j の間に固定し，不安定定常解に対して摂動実験を行う．2 山解に対する固有値を数値的に求めると，1 つの固有値が BP_2 において虚軸を横切り， SN_2 においてもう 1 つの固有値が虚軸を横切ることがわかる (図 3(d))． BP_2 に関する固有関数 φ_2^1 (図 4) は奇関数であり， P_2 に φ_2^1 方向の微小摂動を加えると，摂動の符号に応じて左または右のパルスが分裂を開始する (図 5)，つまり交互分裂がみられる． SN_2 に関する固有関数 φ_2^2 は偶関数 (図 4) であり，その方向に摂動を加えると 2 つのパルスが同時に分裂する様子がみられる．つまり，数値シミュレーションによってみられた分裂過程 (図 2) は φ_2^1, φ_2^2 のどちらのモードが成長するかによって決定することが予想される．

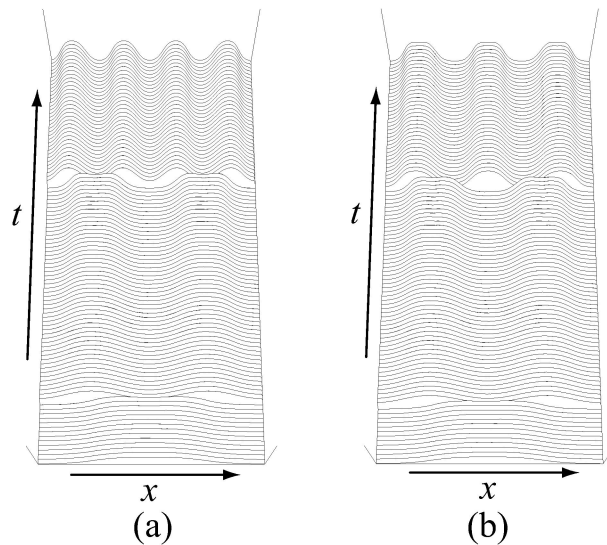


図 2: 領域長が時間とともに成長する場におけるパルスの分裂過程 ($k = 0.0605, L_0 = 1.0$). (a) $c = 1.0 \times 10^{-5}$. (b) $c = 1.0 \times 10^{-6}$. ただし, 領域長が 1.0 になるように空間スケールを変化して図示している.

3 山以上の解になると, 固有値は興味深い振る舞いを見せる. n 山の解は BP_n においてはほぼ同時に $(n - 1)$ 個の固有値が虚軸を横切ることがわかる (図 3(e)). また, 虚軸を横切った固有値は SN_n まで順序を変えることはない. γ が BP_n と SN_n の間に取ったときの解の不安定方向を調べるために, 最大固有値に対する固有関数方向に摂動を加える. 不安定 3 山定常解 P_3 に φ_3^1 方向に正の微小摂動を加えると真ん中のパルスだけが分裂し, 負の摂動に対しては両端の分裂がみられる (いずれの場合でも交互分裂がみられる). 一方, サドル・ノード分岐より γ が大きいときには全てのパルスが分裂する様子がみられる (図 6).

これらの数値実験結果から, 固有値と固有関数に関して次のような性質があることが予想できる.

- (予想 1) n 山定常パルス解の固有値は BP_n において $(n - 1)$ 個の固有値がほぼ同時に虚軸を横切る.
- (予想 2) γ が BP_n と SN_n にあるとき, 最大固有値に対する固有関数は交互分裂を引き起こす形状をしている.

これらの性質を証明することは, 図 2 で示した分裂過程の速度依存性と交互分裂が起きる理由を明らかにする上で重要である. なぜなら大域的分岐図の上に解軌道を描くと, 領域速度が遅いときには分裂が γ が BP_n と SN_n の間にあるときに起き, 摂動実験でみたように交互分裂が観察される. 一方, 領域速度が速いときには γ が SN_n より右側にあるときに分裂するため, 一斉分裂がみられる. このように, 分裂がどのタイミングで起きるか (BP_n と SN_n の間なのか, それとも SN_n を越えたところなのか) によって分裂過程は定性的に変化することがわかる (図 7). 次の章では n 山解の安定性解析を行い, (予想 1) 及び (予想 2) が一般の n 山で正しいことを示す.

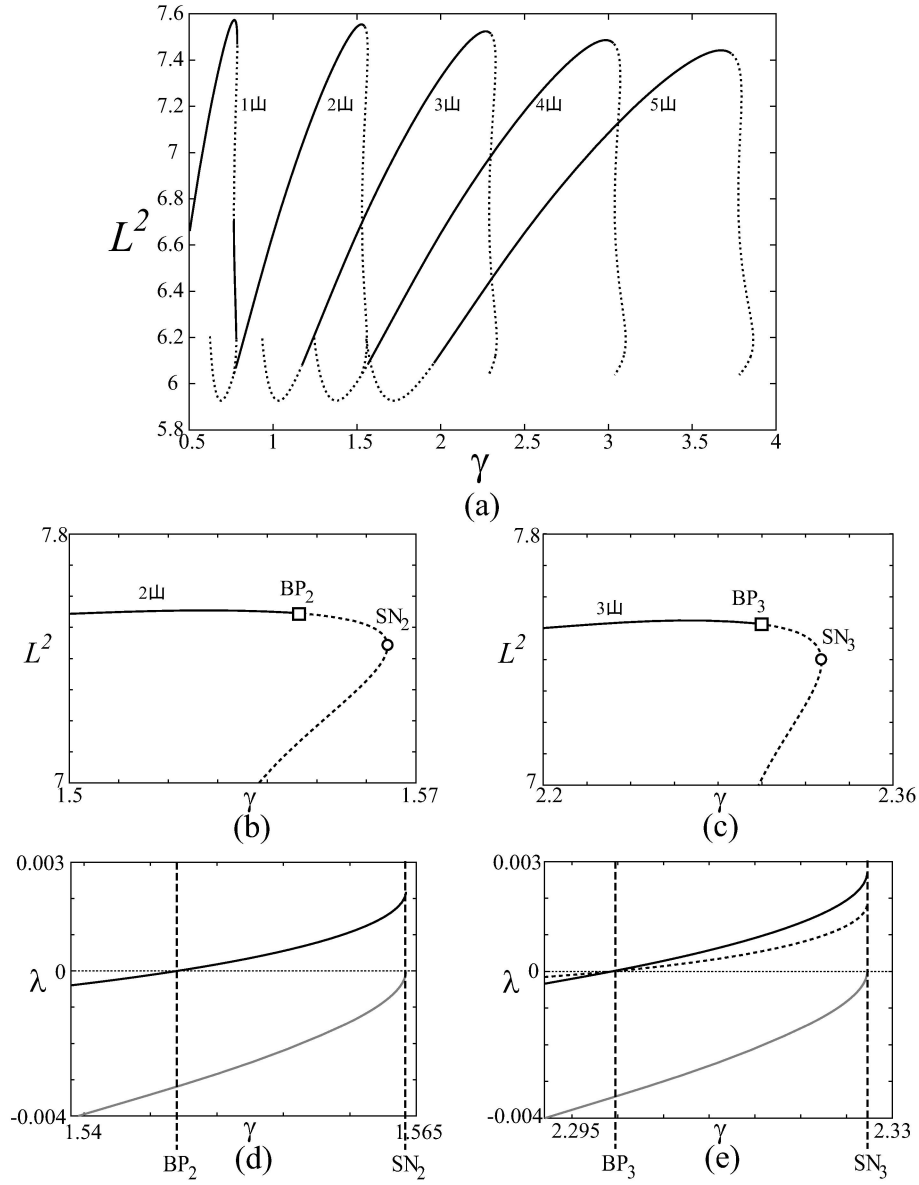


図 3: (a) P_n の大域的分岐図. 実線 (点線) は安定 (不安定) な解. (b) (a) の拡大図. $\gamma \approx 1.547$ にて対称性破壊分岐 (BP_2), $\gamma \approx 1.564$ にてサドル・ノード分岐 (SN_2) が起きる. (c) (a) の拡大図. $\gamma \approx 2.299$ にて対称性破壊分岐 (BP_3), $\gamma \approx 2.327$ にてサドル・ノード分岐 (SN_3) が起きる. (d)[(e)] SN_2 (SN_3) 点近傍における固有値の振る舞い.

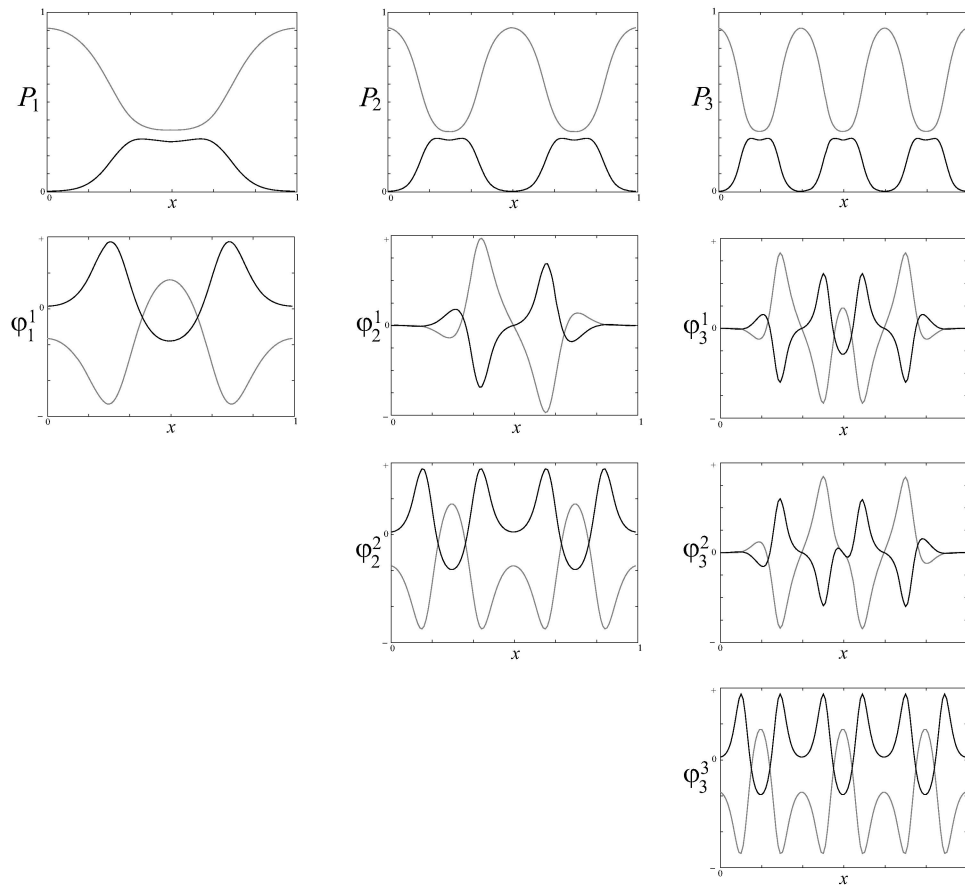


図 4: P_n はサドル・ノード分岐点 SN_n での定常解. φ_n^j は P_n の j 番目の固有値に対する固有関数. 領域長を 1.0 になるように空間スケールを変化させて図示している.

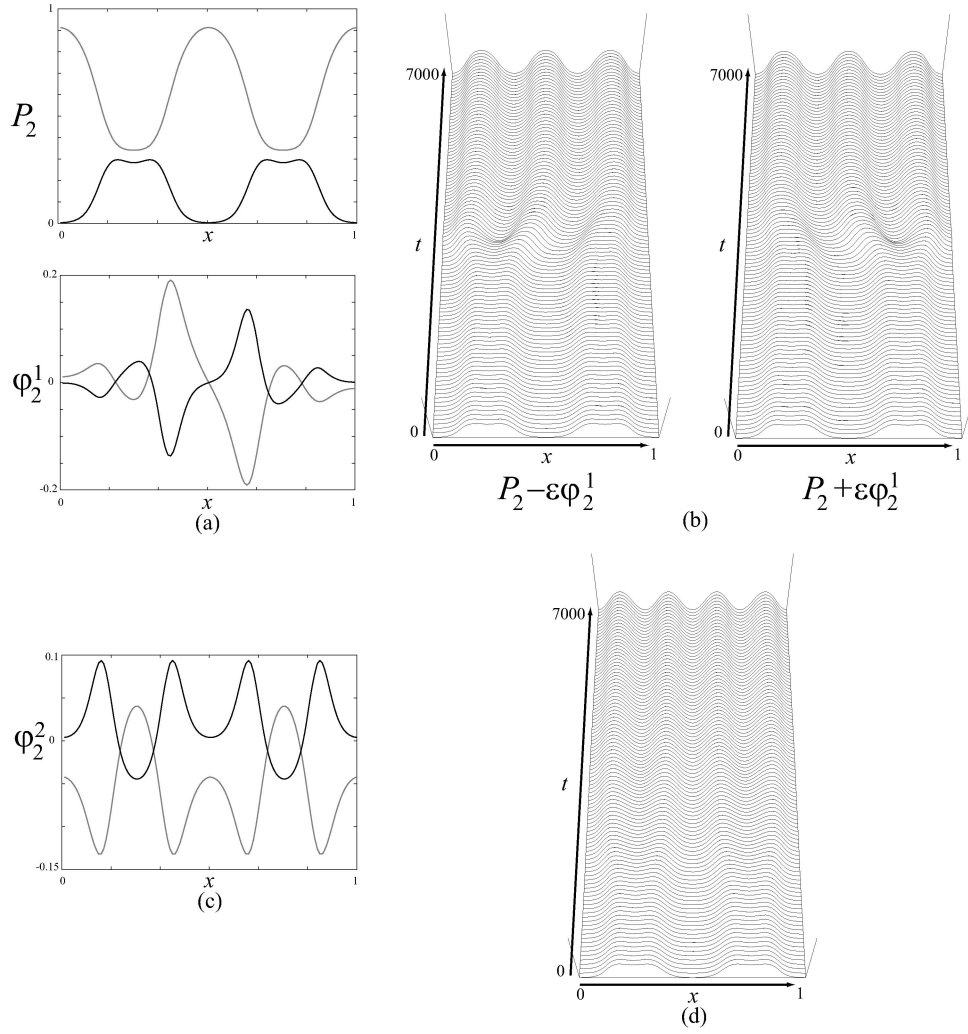


図 5: (a) $\gamma = 1.561$ における P_2 と φ_2^1 . (b) P_2 に対して φ_2^1 の負 (左) 及び正 (右) の微小摂動を加えたときの解の振る舞い. (c) SN_2 における φ_2^2 . (d) γ を SN_2 より大きい値に取ったときの解の振る舞い. ただし, $\varepsilon > 0$.

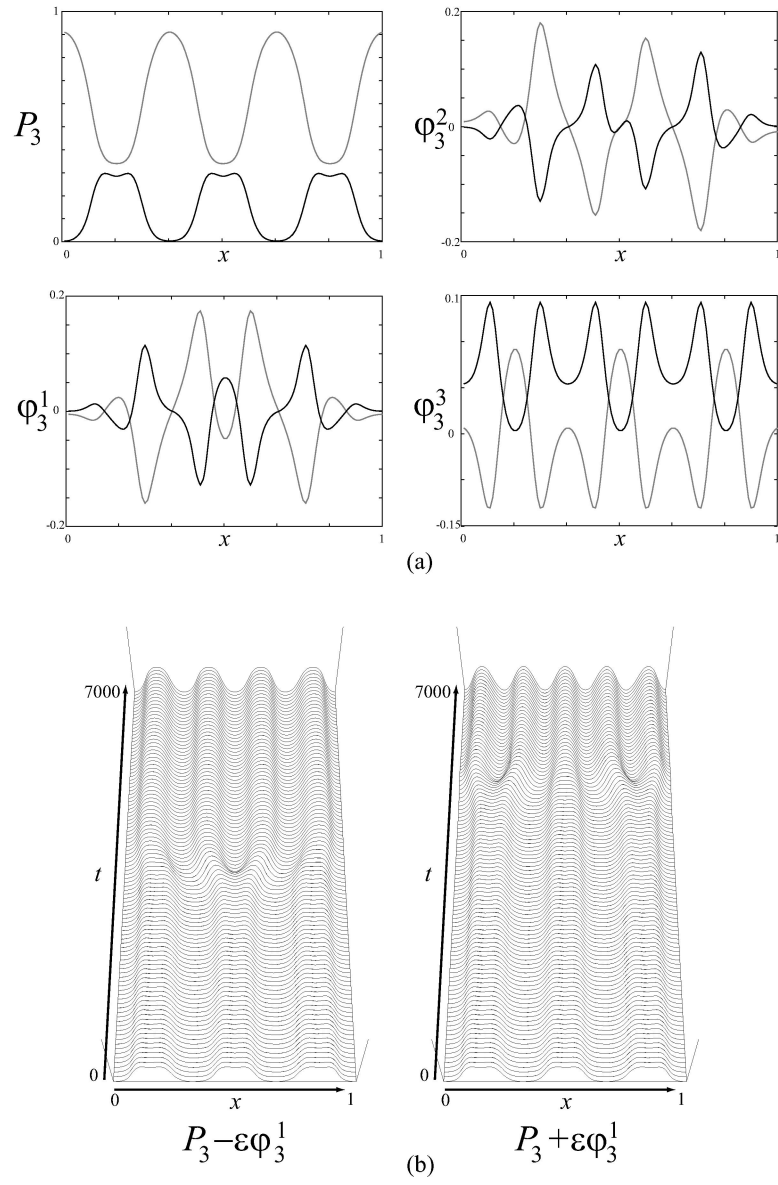


図 6: (a) $\gamma = 2.315$ における P_3 と φ_3^j . (b) P_3 に摂動を加えた場合の解の振る舞い. ただし, $\varepsilon > 0$.

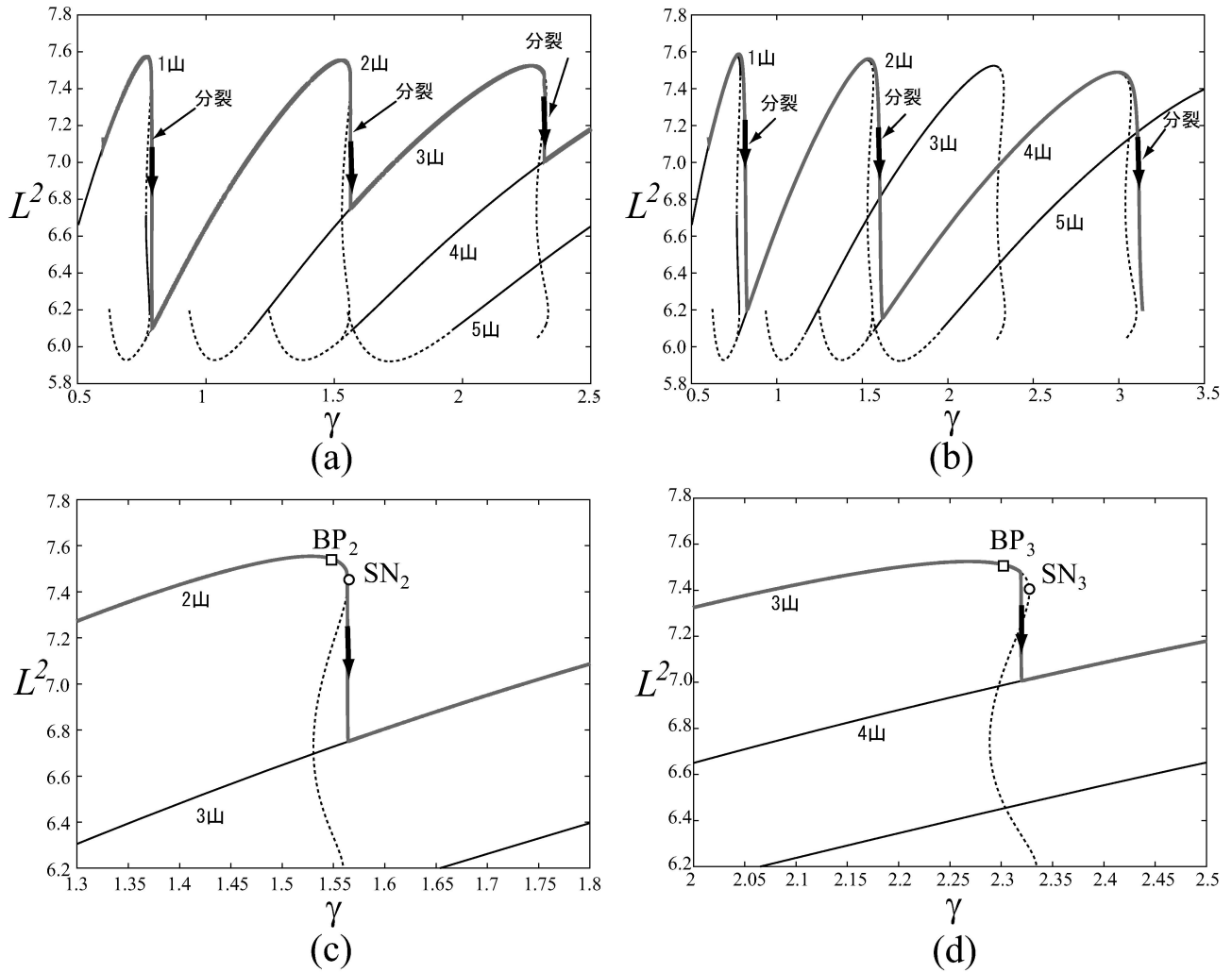


図 7: (a) $c = 4.0 \times 10^{-7}$ のときの解軌道. $\gamma(t)$ が増加することによって解は枝に沿って右側に移動し, γ が BP_n と SN_n ($n = 2, 3$) の間にあるときに分裂が開始する様子がみられる. (b) $c = 1.8 \times 10^{-5}$ のときの解軌道. (a) の場合と比べて領域拡大速度が速いため, BP_2 と SN_2 の間で分裂が起きる前に γ が SN_2 より大きい値に達し, 一斉分裂がみられる. (c) [(d)] SN_2 [SN_3] 近くにおける (a) の拡大図.

3 パルス間相互作用

Ei[7] 及び Ei ら [8] によって提案された手法を用いて Gray-Scott を含む一般的な形の反応拡散系にみられるパルス間相互作用を常微分方程式で記述する.

M 変数からなる反応拡散系を次のように表すことにする.

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{A}(\mathbf{u}; k), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (2)$$

ただし, $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{M-1}) \in X := \{L^2(\mathbb{R}^1)\}^M$, $\mathcal{A}(\mathbf{u}; k) := D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u}; k)$, k はコントロールパラメータである. $D = (d_0, d_1, \dots, d_{M-1})$ ($d_j \geq 0$) は $M \times M$ 対角行列である. ここで, (2) が k に関して次のような分岐が起きると仮定する.

S1) $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in X$ は常に (2) の安定な定数定常解である. つまり, $\mathcal{A}(\mathbf{0}; k) \equiv \mathbf{0}$ であり, 任意の k に対して線形化行列 $F'(\mathbf{0}; k)$ のスペクトルは左半平面に存在する. ただし, (1) のように定数定常解が $(0, 0)$ ではない ($(u, v) = (1, 0)$) 場合は定数定常解が $(0, 0)$ になるように適宜変数変換を行う.

S2) 空間対称な非自明定常解 $\{P^s(x; k)\}$, $\{P^u(x; k)\}$ が存在する. ただし $\{P^s(x; k)\}$ は安定, $P^u(x; k)$ は不安定な解とする.

S3) $P^s(x; k)$ と $P^u(x; k)$ に関する線形化作用素をそれぞれ $L^s(k) = \mathcal{A}'(P^s(x; k))$, $L^u(k) = \mathcal{A}'(P^u(x; k))$ とする. k が $k > k_c$ かつ k_c に十分近い値のとき, $L^s(k)$ は虚軸近くに 0 固有値と $\lambda^s(k) < 0$ となる固有値を持つ. $L^s(k)$ の他のスペクトル $\Sigma_1(L^s(k))$ は $\Sigma_1(L^s(k)) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < -\rho_0\}$ ($\rho_0 > 0$) を満たす.

$L^u(k)$ に対しても同様に $L^u(k)$ のスペクトルは 0, $\lambda^u(k)$ と他のスペクトル $\Sigma_1(L^u(k))$ からなり, $\Sigma_1(L^u(k)) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < -\rho_0\}$ を満たす. 0 と $\lambda^s(k)$ に対する固有関数をそれぞれ P_x^u , $\xi^s(x; k)$ とする.

S4) $k = k_c$ のとき, $P^s(x, k_c) = P^u(x; k_c) =: P(x)$ とする. また, $\lambda^s(k_c) = \lambda^u(k_c) = 0$ かつ $\xi^s(x; k_c) = \xi^u(x; k_c) = \xi(x)$ とする.

方程式 (2) のパラメータ k を k_c の近傍に取り, $k = k_c + \eta$ (η は小さな値) とすると, (2) は次のように書ける.

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \eta g(\mathbf{u}),$$

ただし, $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}; k_c) = D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}; k_c)$, $\eta g(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}; k_c + \eta) - \mathcal{A}(\mathbf{u})$ である.

L の共役作用素を L^* とし, 0 固有値に対応する固有関数を ϕ^* 及び ξ^* とする. 固有関数に関して次の仮定をする.

S5) ϕ^* は奇関数で, 次のように規格化する.

$$\langle P_x, \phi^* \rangle_{L^2} = 1.$$

S6) $P(x)$ と $\phi^*(x)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $\mathbf{0}$ に指数的に減衰する. つまり, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$, $\mathbf{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_{N-1}^*) \in \mathbb{R}^M$, 及び $\alpha > 0$ が存在し次が成り立つ.

$$P(x) \rightarrow e^{-\alpha|x|} \mathbf{a}, \quad \phi^*(x) \rightarrow \pm e^{-\alpha|x|} \mathbf{a}^*, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

S7) $\xi(x)$ と $\xi^*(x)$ は空間対称で, 指数的に減衰する. つまり, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, $\mathbf{b}^* = (b_0^*, b_1^*, \dots, b_{N-1}^*) \in \mathbb{R}^M$, 及び $\alpha > 0$ が存在し

$$\xi(x) \rightarrow e^{-\alpha|x|} \mathbf{b}, \quad \xi^*(x) \rightarrow e^{-\alpha|x|} \mathbf{b}^*, \quad x \rightarrow \infty$$

ここで $\xi(x)$ と $\xi^*(x)$ は次のように正規化する.

$$\langle \xi, \xi^* \rangle_{L^2} = \frac{\widetilde{M}_0}{M_0}.$$

ただし,

$$M_0 = 2\alpha \langle D\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle, \quad \widetilde{M}_0 = -2\alpha \langle D\mathbf{a}, \mathbf{b}^* \rangle.$$

である.

対称性から $\langle P_x, \xi^* \rangle_{L^2} = \langle \xi, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$ が成り立つことに注意する.

次の節で導出する方程式は M_0 , \widetilde{M}_0 に加え, 次に挙げる変数の符号によって定性的な振る舞いが変化する.

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\alpha \langle D\mathbf{b}, \mathbf{a}^* \rangle, \quad \widetilde{M}_1 = -2\alpha \langle D\mathbf{b}, \mathbf{b}^* \rangle, \\ M_2 &= \frac{M_0}{2\widetilde{M}_0} \langle F''(P)\xi \cdot \xi, \xi^* \rangle_{L^2}, \quad M_3 = -\frac{M_0}{\widetilde{M}_0} \langle g(P), \xi^* \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

ここでは, 次のような仮定をする.

S8) $M_0, \widetilde{M}_0, M_1, \widetilde{M}_1, M_2, M_3$ は全て正の値である.

注意 3.1 M_0 の符号はパルス同士が吸引力的な相互作用をするか反発的な相互作用をするかを決定する. 例えば Gray-Scott モデルの場合は M_0 が正であることが数値的に知られており, 実際パルス同士は反発することが数値的に観察される.

パルス間の弱相互作用

有限区間上に N 個存在するパルス同士の相互作用を記述する常微分方程式を導出する. 文献 [8] で提案した方法を用いることによって, 無限区間におけるパルス間相互作用を記述する方程式を導出することができるが, ノイマン境界条件や周期境界条件の場合はその手法を容易に有限区間の問題に適用することができる.

等間隔に整列した N 山からのずれを表す変数を次のように定義する.

$$q_j := x_j - (j - 1/2)\bar{h} \quad (j = 0, \dots, N-1),$$

ただし x_j は j 番目のパルスの位置, $\bar{h} = L/N$ である. また, $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ とする.

パルス間が十分大きく, r_j が十分小さい値のとき q_j と r_j は次の方程式に従うことがわかる (ただし, 高次の項は省略する).

$$\begin{cases} \dot{q}_j = H_j(\mathbf{h}) - G_j(\mathbf{h}), \\ \dot{r}_j = M_2 r_j^2 + \eta M_3 + M_4 \delta r_j + \tilde{H}_j(\mathbf{h}) - \tilde{G}_j(\mathbf{h}) + M_5 \delta^2, \end{cases} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \quad (3)$$

ただし,

$$\begin{aligned} H_j(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \delta) &= \alpha M_0 (q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) \delta \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \\ \tilde{H}_j(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \delta) &= M_0 (-2 + \alpha (q_{j-1} - q_{j+1})) \delta \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \\ G_j(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \delta) &= M_1 (r_{j+1} - r_{j-1}) \delta \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \\ \tilde{G}_j(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \delta) &= M_1 (r_{j-1} + r_{j+1}) \delta \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \\ \delta &= \exp(-\alpha \bar{h}), \end{aligned}$$

である. r_j は j 番目のパルスの分裂方向の不安定化の度合いを表す. ノイマン境界条件においては $q_{-1} = -q_0$, $q_N = -q_{N-1}$, $r_{-1} = r_0$, $r_N = r_{N-1}$, 周期境界条件においては $q_{-1} = q_{N-1}$, $q_N = q_0$, $r_{-1} = r_{N-1}$, $r_N = r_0$ とする.

仮定 S6) にて $(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ が $x \rightarrow \pm\infty$ で指数的に減衰すると仮定した. ここではさらに, その中で減衰指数が一番小さい変数が存在すると仮定し, その変数を u_0 とする. また, その他の変数は u_0 の減衰速度より十分速く減衰すると仮定する. ここで, 次のように仮定する.

S10)

$$\begin{aligned} \langle D\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle &= d_0 a_0 a_0^*, \\ \langle D\mathbf{a}, \mathbf{b}^* \rangle &= d_0 a_0 b_0^*, \\ \langle D\mathbf{b}, \mathbf{a}^* \rangle &= d_0 b_0 a_0^*, \\ \langle D\mathbf{b}, \mathbf{b}^* \rangle &= d_0 b_0 b_0^*, \end{aligned}$$

とする.

S10) によって

$$M_0 / \widetilde{M}_0 = M_1 / \widetilde{M}_1,$$

が得られる.

方程式を見やすくするために $\tilde{r}_j = M_1 (r_j + M_4 \delta / (2M_2)) / (\alpha M_0)$, $\tilde{t} = t / (\alpha M_0)$ とする. さらに, $N_1 = \alpha M_0 M_2 / M_1^2$, $N_2 = 2/\alpha$, $N_3 = M_3 / \alpha M_0$, $N_4 = (4M_1 M_4 - M_4 + 4M_2 M_5) / (4\alpha M_0 M_2)$ とし S10) を仮定すると (3) はチルダを除いた後に次のようになる.

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \delta (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) - \delta (r_{j-1} - r_{j+1}), \\ \dot{r}_j = \delta (q_{j-1} - q_{j+1}) - \delta (r_{j-1} + r_{j+1}) + N_1 r_j^2 - N_2 \delta + N_3 \eta + N_4 \delta^2. \end{cases}$$

N 山解は次のように表すことができる.

$$q_j = \bar{q}(\delta) = 0, \quad r_j = \bar{r}_+(\delta) = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + N_1(N_2\delta - N_3\eta - N_4\delta^2)}}{N_1}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

かつ

$$q_j = \bar{q}(\delta) = 0, \quad r_j = \bar{r}_-(\delta) = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + N_1(N_2\delta - N_3\eta - N_4\delta^2)}}{N_1}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

$(\bar{q}(\delta), \bar{r}(\delta)) = (0, \bar{r}_+(\delta))$ を上枝, $(0, \bar{r}_-(\delta))$ の方を下枝と呼ぶことにする. これらの枝はサドル・ノード分岐点

$$\delta = \delta_{SN} = \begin{cases} \frac{(-N_1N_2 + \sqrt{(N_1N_2)^2 + 4(1 - N_4)N_1N_3\eta})}{2(1 - N_4)}, & (N_4 \neq 1), \\ \frac{N_3}{N_2}\eta, & (N_4 = 1). \end{cases}$$

において繋がる.

この枝の周りで (3) の安定性解析を行うと

$$(n_+, n_0, n_-) = \begin{cases} (0, 0, 2N), & \delta_{BP}^- < \delta < \delta_{BP}^+, \\ (0, N-1, N+1), & \delta = \delta_{BP}^-, \\ (N-1, 0, N+1), & \delta_{SN} < \delta < \delta_{BP}^-, \\ (N-1, 1, N), & \delta = \delta_{SN}, \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, n_+, n_0, n_- はそれぞれ下枝の解の正, 0, 負の固有値の数であり,

$$\delta_{BP}^+ = \begin{cases} \frac{(N_1N_2 + \sqrt{(N_1N_2)^2 - 4(3 + N_1N_4)N_1N_3\eta})}{2(3 + N_1N_4)}, & (N_1N_4 \neq -3), \\ \infty, & (N_1N_4 = -3). \end{cases}$$

$$\delta_{BP}^- = \begin{cases} \frac{(N_1N_2 - \sqrt{(N_1N_2)^2 - 4(3 + N_1N_4)N_1N_3\eta})}{2(3 + N_1N_4)}, & (N_1N_4 \neq -3), \\ \frac{N_3}{N_2}\eta, & (N_1N_4 = -3). \end{cases}$$

である. δ_{SN} がサドル・ノード分岐点 SN_n に対応し, δ_{BP}^- は BP_n に対応する. また, n 山解の上枝に関しては少なくとも 1 つ以上の正の固有値を持つため常に不安定である. これらの結果から常微分方程式によって得られた分岐図と固有値の振る舞いは定性的に数値実験によって得られた結果 (図 3) と一致する. つまり, (予想 1) は一般の n 山に対して成り立つことがわかる.

固有ベクトルにおいては次のことがわかる. ${}^t(q_0^s, q_1^s, \dots, q_{N-1}^s, r_0^s, r_1^s, \dots, r_{N-1}^s)$ を $\delta = \delta_{SN}$ における 0 固有値の固有ベクトルとすると $q_j^s = 0$ かつ $r_j^s = 1$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) となる. また, ${}^t(q_0^l, q_1^l, \dots, q_{N-1}^l, r_0^l, r_1^l, \dots, r_{N-1}^l)$ ($N \geq 2$) を $\delta \in (\delta_{SN}, \delta_{BP}^-)$ における最大固有値の固有ベクトルとすると, r_j^l と r_{j+1}^l ($j = 0, 1, \dots, N-2$) は異なる符号を持つ. これらの性質から数値実験によって得られた (予想 2) が成り立つことがわかる. 実際, サドル・ノード分岐に対する固有ベクトルの r_j 成分が全て 1 であることは一斉分裂方向の不安定化を意味する. また, $\delta \in (\delta_{BP}, \delta_{SN}]$ において最大固有値に対する固有ベクトルの r_j^l と r_{j+1}^l が異なる符号を持つことは BP_n と SN_n の間では交互分裂が起きることを意味している.

参考文献

- [1] P. de Kepper, J. -J. Perraud, B. Rudovics and E. Dulos, *Int. J. Bifur. Chaos* **4**(5) (1994), 1215–1231.
- [2] S. Kondo and R. Asai, *Nature*, **376** (1995), 765–768.
- [3] Y. Nishiura and D. Ueyama, *Physica D*, **130** (1999), 73–104.
- [4] E. J. Crampin, E. A. Gaffney and P. K. Maini, *Bull. Math. Biol.*, **61** (1999), 1093–1120.
- [5] 上田 肇一, 西浦 廉政, 数理解析研究所講究録, **1313** (2003), 53–65.
- [6] I. Barrass, E. J. Crampin, P. K. Maini, *Bull. Math. Biol.*, **68** 981–995 (2006).
- [7] S. -I. Ei, *J. Dyn. Diff. Eqs.*, **14**(1) (2002), 85–137.
- [8] S.-I. Ei, Y. Nishiura and K.-I. Ueda, *Japan J. Ind. Appl. Math.*, **18** (2001), 181–205.